

WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY
im. prof. Stefana Banacha
Zawody indywidualne
X LO Toruń, 18 września 2020 roku

Czas rozwiązywania: 180 minut

Zadanie 1. Liczba dwucyfrowa

Jeśli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeśli tą samą liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. Wyznacz tę liczbę.

Zadanie 2. Nierówność

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x, y, z takich, że $xyz > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Zadanie 3. Iloczyn silni

Czy spośród liczb $1!, 2!, 3!, \dots, 2020!$ można wykreślić jedną liczbę tak, aby iloczyn pozostałych liczb był kwadratem liczby naturalnej? Liczba $n!$ (silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Środek środkowej

Przez wierzchołek A trójkąta ABC poprowadzono półprostą p , dzielącą środkową CD na połowy. Wykaż, że prosta p dzieli bok BC w stosunku 2: 1.

Zadanie 5. Suma cyfr

Niech $S(x)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej x . Rozwiąż równanie $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2020$. Odpowiedź uzasadnij.