Konkurs indywidualny 2020 – szkice rozwiązań

Zadanie 1. Liczba dwucyfrowa

Jeśli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeśli tą samą liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie: Wiemy, że $10x + y = 6(x + y) + 3$ oraz
$10x + y = 5(x + y + 2) + 5$. Stąd $x = 7$ i $y = 5$. Szukana liczba to 75.

Zadanie 2. Nierówność

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x, y, z takich, że $xyz > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$$

Rozwiązanie.
Mnożąc stronami powyższą nierówność przez xyz otrzymujemy :
$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$,
po pomnożeniu nierówności obustronnie przez 2 i wykonaniu przekształceń otrzymujemy: $(xy - yz)^2 + (xy - zx)^2 + (yz - zx)^2 \geq 0$, która jest prawdziwa.

Zadanie 3. Iloczyn silni

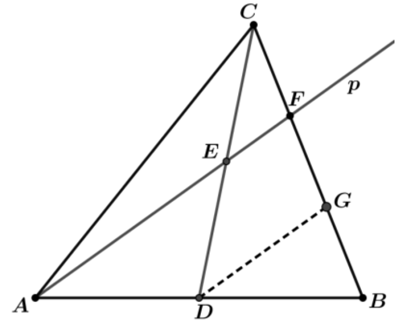
Czy spośród liczb $1!, 2!, 3!, \ldots, 2020!$ można wykreślić jedną liczbę tak, aby iloczyn pozostałych liczb był kwadratem liczby naturalnej? Liczba $n!$ (silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:
Tak, należy z iloczynu wykreślić liczbę 1010!.
Niech $N = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2020!$.
Wtedy $N = 1^{2020} \cdot 2^{2019} \cdot 3^{2018} \cdot \ldots \cdot 2019^2 \cdot 2020^1$
Wykładniki potęg o podstawach będących liczbami nieparzystymi są liczbami parzystymi, a wykładniki przy parzystych liczbach są liczbami nieparzystymi. Zatem $N = a^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2020$, gdzie a jest liczbą naturalną dodatnią. Zauważmy, że $N = a^2 \cdot 2^{1010} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1010) = (2^{505} \cdot a)^2 \cdot 1010!$, zatem wykreślając liczbę 1010! iloczyn pozostałych czynników jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 4. Środek środkowej

Przez wierzchołek A trójkąta ABC poprowadzono półprostą p, dzielącą środkową CD na połowy. Wykaż, że prosta p dzieli bok BC w stosunku $2:1$.

Rozwiązanie:
Poprowadźmy odcinek DG równoległy do prostej p (patrz rysunek);



Stosując dwukrotnie twierdzenia Talesa dla trójkąta DGC oraz trójkąta ABF otrzymujemy, że: punkt F jest środkiem odcinka CG oraz punkt G jest środkiem odcinka FB. Z równości $|CF| = |FG| = |GB|$ otrzymujemy tezę zadania.

Zadanie 5. Suma cyfr

Niech $S(x)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej x.
Rozwiąż równanie $x + S(x) + S(S(x)) + S\left(S(S(x))\right) = 2020$.
Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie
Równanie spełniają jedynie liczby 2008, 1990.
Zauważmy, że dla liczb naturalnych x mniejszych od 1975, $S(x) < 28$
i suma $S(x) + S(S(x)) + S\left(S(S(x))\right)$ jest mniejsza od 46.
Sprawdzając równanie
$x + S(x) + S(S(x)) + S\left(S(S(x))\right) = 2020$ dla liczb naturalnych
$1975 \leq x \leq 2020$, Otrzymujemy, że równanie spełniają jedynie liczby 2008 i 1990.

$$2008 + S(2008) + S(S(2008)) + S\left(S(S(2008))\right) = 2008 + 10 + 1 + 1 = 2020$$

$$1990 + S(1990) + S(S(1990)) + S\left(S(S(1990))\right) = 1990 + 19 + 10 + 1 = 2020$$