

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół średnich)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2022/23**

**Zadanie 1. Liczba 2023-cyfrowa**

Niech  $L$  będzie liczbą 2023-cyfrową, utworzoną z samych jedynek, tzn.  $L = \underbrace{111 \dots 1}_{2023 \text{ jedynek}}$ .

Wyznacz sumę cyfr liczby  $9L^2 + 2L$ .

**Zadanie 2. Własności bezwzględnej wartości**

Liczby rzeczywiste  $a, b$  spełniają nierówności:  $|a + b| \leq 2$  i  $|a - b| \leq 2$ . Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $r \in [-1, 1]$  zachodzi nierówność  $|ra + b| \leq 2$ .

**Zadanie 3. Liczby na wierzchołkach ośmiokąta.**

Czy możliwe jest rozmieszczenie liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 na wierzchołkach ośmiokąta tak, aby suma liczb znajdujących się w każdym trzech kolejnych wierzchołkach była większa od:

a) 11 b) 13. Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 4. Równość implikuje nierówność**

Niech  $a, b$  będą takimi liczbami dodatnimi, że  $a^2 + ab + b^2 = 3$ .

Udowodnij, że  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 3 \geq \frac{5}{ab}$ .

**Zadanie 5. Układ równań**

Wyznacz wszystkie trójki liczb nieujemnych  $(x, y, z)$  spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x^2 - y = (z - 1)^2 \\ y^2 - z = (x - 1)^2 \\ z^2 - x = (y - 1)^2 \end{cases}$$

**Zadanie 6. Podzielność**

Znajdź największą liczbę naturalną  $n$ , dla której liczba  $n^3 + 100$  dzieli się przez  $n + 10$ .

**Zadanie 7. Pomalowany okrąg**

Wszystkie punkty okręgu pomalowano dwoma kolorami. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg, którego wszystkie wierzchołki mają ten sam kolor.

### Zadanie 8. Roztwór

Z 98%-procentowego roztworu odlano 1 kg roztworu, a następnie dolano 1 kg wody. Następnie odlano 3 kg roztworu i dolano 3 kg wody. Otrzymano roztwór o stężeniu 48%. Wyznacz masę roztworu.

### Zadanie 9. Liczba złożona

Liczby  $x, y$  są liczbami naturalnymi większymi od 1 oraz liczba  $x^2 + y^2 - 1$  jest podzielna przez  $x + y - 1$ . Udowodnij, że liczba  $x + y - 1$  jest liczbą złożoną.

### Zadania 10. Liczba złożona

Pierwiastki równania  $x^2 + mx + n = 0$  są liczbami całkowitymi różnymi od zera. Udowodnij, że liczba  $m^2 + (n - 1)^2$  jest liczbą złożoną.

### Zadanie 11. Taneczny bal

W balu tanecznym uczestniczyło 28 osób: mężczyzn i kobiet. Każda kobieta zatańczyła z wszystkimi mężczyznami oprócz czterech, każdy mężczyzna zatańczył z wszystkimi kobietami oprócz trzech. Ilu mężczyzn było na balu? Odpowiedź uzasadnij.

### Zadanie 12. Trójkąt ostrokątny

W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  środkami boków  $AC$  i  $BC$  są odpowiedni punkty  $M$  i  $N$ . Wysokość trójkąta  $ABC$  poprowadzona z punktu  $C$  przecina odcinek  $MN$  w punkcie  $D$ . Symetralna boku  $AB$  przecina  $MN$  w punkcie  $E$ . Wykaż, że  $|MD| = |NE|$ .

---

Rozwiązania tych zadań sprawdzają nauczycieli matematyki oceniając każde w skali od 0 do 5 punktów. Wyniki prac należy przesłać do dnia 22 marca 2023 rok na adres:

**X Liceum Ogólnokształcące im. prof. Stefana Banacha**  
**87-100 Toruń, plac św. Katarzyny 9**  
**tel. (0-56) 622-27-33**

lub na:

**e-mail: tmaslow@onet.eu**

Zgłoszenie powinno zawierać imię, nazwisko ucznia, klasę i typ szkoły, punktację za każde zadanie oraz imię i nazwisko nauczyciela. Z każdej szkoły, której uczniowie przyślą rozwiązania zadań, automatycznie do finału zapraszamy trzech najlepszych uczniów pod warunkiem, że uzyskali oni, co najmniej połowę punktów możliwych do zdobycia. Pozostałymi finalistami zostają uczniowie, którzy zdobyli największą liczbę punktów w grupie wszystkich, którzy przysłali rozwiązania. Każda szkoła może być reprezentowana przez co najwyżej 15 uczniów. Finał wojewódzki dla około 100 autorów najlepszych prac odbędzie się w piątek 14 kwietnia 2023 roku w X LO w Toruniu.