

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2017/18**

### 1. Prawdomówni i kłamcy

W pewnym mieście żyją tylko mieszkańcy prawdomówni (zawsze mówią prawdę) i kłamcy (zawsze kłamią). Miasto liczy 366 mieszkańców i każdy urodził się innego dnia pewnego przestępnego roku. Wszystkim mieszkańcom zadano dwa pytania:

- (1) Czy urodziłeś się w lutym?
- (2) Czy urodziłeś się 30 dnia dowolnego miesiąca?

Na pierwsze pytanie pozytywnie odpowiedziało 100 osób, na drugie 60 osób. Ilu prawdomównych mieszkańców urodziło się w lutym? Odpowiedź uzasadnij.

### 2. 2018 liczb

Na tablicy zapisano w rzędzie liczby naturalne od 1 do 2018: 1, 2, 3, ..., 2018. Czy wśród tych liczb można zetrzeć takie dwie, aby suma wszystkich liczb zawartych między nimi, była dwa razy mniejsza od sumy wszystkich pozostałych niestartych liczb? Odpowiedź uzasadnij.

### 3. Liczby 9-cyfrowe

Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zbudowano dziewięć, niekoniecznie różnych liczb dziewięciocyfrowych; w każdej z nich wykorzystano wszystkie cyfry. Ilość maksymalnie zerami może kończyć się liczba będąca sumą tych dziewięciu liczb? Odpowiedź uzasadnij.

### 4. Nierówność

Niech  $a$  i  $b$  są liczbami nieujemnymi. Udowodnij, że jeśli  $a + b = 2$ , to  $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{ab+1}$ .

### 5. Dwa okręgi i trójkąt

Długości boków  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  pewnego trójkąta spełniają warunek  $1 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$ . Udowodnij, że  $r \cdot R = \frac{1}{2}$ , gdzie  $r$  oznacza promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, a  $R$  - promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

### 6. Równanie z częścią całkowitą

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające równanie:  $\left[ \frac{2017}{x} \right] + \left[ \frac{2018}{x+1} \right] = 230$ , gdzie  $[a]$  oznacza część całkowitą liczby  $a$ .

### 7. Dwa pierwiastki

Niech  $b = \sqrt{a + \sqrt{a}}$ , gdzie  $a$  jest liczbą naturalną dodatnią. Uzasadnij, że  $b$  nie może być liczbą naturalną.

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2017/18**

**8. Trójkąt i dwusieczna**

W trójkącie  $ABC$  miara  $\sphericalangle ACB$  wynosi  $120^\circ$ . Dwusieczna  $\sphericalangle ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Udowodnij, że  $\frac{1}{|CD|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|BC|}$ .

**9. Różnica dwóch liczb**

Udowodnij, że różnica  $11\dots11 - 22\dots22$ , w której liczba cyfr w pierwszej liczbie, jest dwa razy większa od liczba cyfr w drugiej liczbie, jest kwadratem liczby naturalnej.

**10. Układ równań**

Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} x^2 + 9 = 2(2x + y) \\ y^2 + 9 = 2(2y + x) \end{cases}$$

**11. Trapez i dwa okręgi**

Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawie  $AB$ . Środek okręgu opisanego na trójkącie  $ACD$  leży na prostej  $BD$ . Uzasadnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABD$  leży na prostej  $AC$ .

**12. Równość i nierówność**

Liczby dodatnie  $x$  i  $y$  spełniają równość  $x^3 + y^3 = x - y$ . Udowodnij, że  $x^2 + y^2 < 1$ .

---

Rozwiązania zadań sprawdzają nauczyciele matematyki oceniając każde w skali od 0 do 5 punktów. Zestawienie wyników z punktacją za każde zadanie prosimy o przesłanie na adres:

**Zespół Szkół nr 10 im. prof. Stefana Banacha**  
**87-100 Toruń, plac św. Katarzyny 9**  
**tel. (0-56) 622-27-33**

lub na:

**e-mail: tmaslow@onet.eu**

do dnia 5 marca 2018 roku. Finał wojewódzki dla około 100 autorów najlepszych prac odbędzie się 23, 24 marca 2018 roku w Zespole Szkół nr 10 w Toruniu. W trakcie tych dni odbędą się zawody indywidualne (w piątek) i zespołowe (w sobotę). W zawodach zespołowych uczestniczą szkoły, które mogą wyłonić (spośród zakwalifikowanych do drugiego etapu) 3-osobową drużynę. Każda szkoła może być reprezentowana przez co najwyżej dwie drużyny oraz co najwyżej dziesięciu uczniów.