Szkice rozwiązań CZĘŚĆ DRUŻYNOWA

1. Równanie „2016". Udowodnij, że równanie $x^{11}-x^5-2016=0$ nie ma rozwiązań niewymiernych.

Rozwiązanie: Zbadajmy funkcję $f(x)=x^{11}-x^5=x^5(x^6-1)$. Funkcja dla $x\le -1$ przyjmuje wartości niedodatnie, dla $-1<x<1$ funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1, a dla $x>1$ funkcja $f(x)=x^5(x^6-1)$ jest funkcją rosnąca (jako iloczyn dwóch funkcji rosnących dodatnich). Zatem funkcja może przyjąć wartość 2016 tylko raz i ma to miejsce dla $x=2$, $f(2)=2^{11}-2^5=2048-32=2016$. Liczba 2 jest liczbą wymierną, zatem równanie $x^{11}-x^5-2016=0$ nie ma niewymiernych rozwiązań.

2. Nierówność. Udowodnij, że jeśli liczby dodatnie x,y,z spełniają warunek $x+y+z=19$, to $\frac{9}{x}+\frac{49}{y}+\frac{81}{z}\ge 19$.

Rozwiązanie : Zauważmy, że z faktu $(x-3)^2\ge 0$ wynika, iż $\frac{9}{x}\ge 6-x$. Podobnie $\frac{49}{y}\ge 14-y$ oraz $\frac{81}{z}\ge 18-z$. Dodając te trzy nierówności stronami otrzymujemy tezę zadania.

3. Dwie liczby. Czy istnieją takie dwie liczby naturalne, że pierwsza liczba jest 2016 razy większa od drugiej, ale suma cyfr pierwszej liczby jest 2016 razy mniejsza od sumy cyfr drugiej liczby? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Istnieją. Niech $n=11\ldots15$ będzie mniejszą liczbą, zawierającą ponad 10 jedynek. Liczbą większą niech będzie $N=2016\cdot n=11\ldots15\cdot 2016$. Stąd:

$$N=10080+20160+201600+2016000+\ldots+201600\ldots0=2240\ldots07840.$$

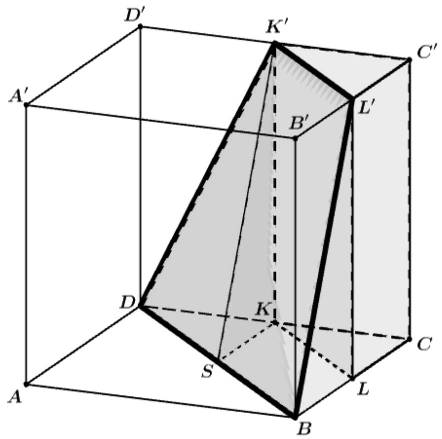
Suma cyfr liczby N wynosi 27, zatem suma cyfr liczby mniejszej $n=11\ldots15$ musi być równa $27\cdot 2016$. Liczba $n=11\ldots15$ składa się więc z $27\cdot 2016-5$ jedynek.

4. Cztery okręgi. Na płaszczyźnie cztery okręgi o promieniu 1 mają punkt wspólny P. Udowodnij, że pewne dwa spośród nich mają środki odległe o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie: Niech O_1,O_2,O_3,O_4 będą środkami okręgów. Jeden z kątów O_iPO_j ma miarę nie większą od 90^o. Niech będzie to np. kąt O_1PO_2. Wtedy na podstawie twierdzenia cosinusów $|O_1O_2|\le\sqrt{2}$, gdyż $\cos(\angle O_iPO_j)\ge 0$.

5. Przekrój sześcianu. W sześcianie poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy oraz środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła sześcian na dwa wielościany. Oblicz stosunek ich objętości.

Rozwiązanie: (patrz rysunek)



Objętość graniastosłupa KLCK'L'C': $V_1=\frac{1}{8}a^3$, objętość ostrosłupa DSKK': $V_2=\frac{1}{24}a^3$, objętość graniastosłupa BLL'SKK': $V_3=\frac{1}{8}a^3$. Objętości mniejszego wielościanu wynosi $V_m=\frac{7}{24}a^3$, a większego $V_d=\frac{17}{24}a^3$. Stosunek objętości wielościanów wynosi: $7:17$.