Szkice rozwiązań - Część indywidualna

Zadanie 1. Trzy ułamki

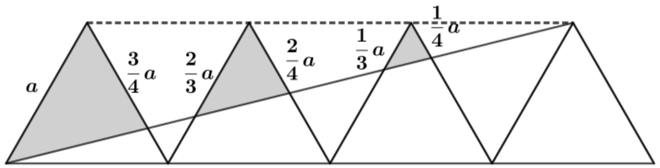
Liczby naturalne x, y spełniają warunek $\frac{2018}{2019} < \frac{x}{y} < \frac{2019}{2020}$. Wyznacz najmniejszą wartość $x + y$. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Niech $y = x + d$, zatem $1 - \frac{1}{2019} < \frac{y-d}{y} < 1 - \frac{1}{2020}$. Stąd $\frac{1}{2019} > \frac{d}{y} > \frac{1}{2020}$.
Dla $d = 1$ nierówność nie ma rozwiązań. Jeśli $d = 2$, to $y = 4039$ i $x = 4037$ oraz $x + y = 8076$. Jeśli $d > 2$, wtedy $x, y > 6000$, zatem $x + y > 12000$.
Szukana najmniejsza wartość $x + y$ jest równa 8076.

Zadanie 2. Cztery trójkąty równoboczne

Podstawy czterech przystających trójkątów równobocznych leżą na jednej prostej. Wierzchołek pierwszego trójkąta połączono odcinkiem z wierzchołkiem czwartego trójkąta (patrz rysunek). Oblicz stosunek pola zacieniowanego do pola jednego trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie: Niech a oznacza długość boku trójkąta równobocznego. Połączmy odcinkiem wierzchołki trójkątów równobocznych. Stosując twierdzenie Talesa otrzymujemy długości boków trójkątów, których pola mamy obliczyć.



Niech P_Δ oznacza pole trójkąta równobocznego. Pole figury składającej się z trzech trójkątów jest równe:

$$P_f = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot P_\Delta + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot P_\Delta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot P_\Delta = \frac{9}{12} P_\Delta + \frac{4}{12} P_\Delta + \frac{1}{12} P_\Delta = \frac{7}{6} P_\Delta.$$

Szukany stosunek pól wynosi $\frac{7}{6}$.

Zadanie 3. Suma dzielników

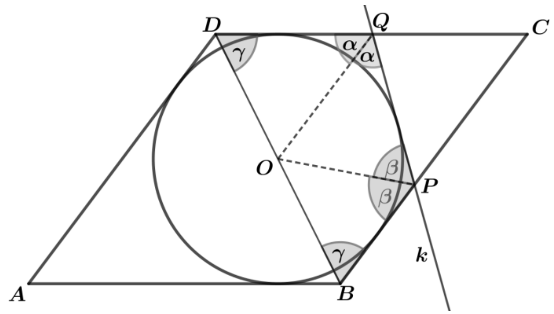
Wyznacz wszystkie naturalne liczby n, dla których suma dwóch największych dzielników wynosi 2019.

Rozwiązania:
Niech $1, p$ będą najmniejszymi dzielnikami tej liczby, gdzie p jest liczbą pierwszą. Niech n i $\frac{n}{p}$ będą największymi dzielnikami liczby n. Mamy wtedy: $n + \frac{n}{p} = 2019$, więc $n = \frac{p \cdot 2019}{p+1}$, stąd $p + 1 | 2019$. Zatem $p \in \{1, 3, 673, 2019\}$. W przypadku $p + 1 = 3, p = 2$ jest liczbą pierwszą i $n = 1346$. Liczba 1346 spełnia warunki zadania.

Zadanie 4. Okrąg i romb

Okrąg jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k jest styczna do tego okręgu i przecina boki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że wartość iloczynu $|BP| \cdot |DQ|$ nie zależy od wyboru prostej k.

Rozwiązanie



Kąty $\angle DQO = \angle OQP$, gdyż QD i QP są stycznymi do okręgu. Analogicznie kąty $\angle QPO = \angle BPO$. Kąty $\angle BDC = \angle CBD$, gdyż trójkąt DBC jest równoramienny. Sumując kąty czworokąta DBPQ otrzymujemy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Stąd trójkąty DQO i BOP są podobne z cechy kąt-kąt-kąt. Mamy więc $\frac{|DO|}{|DQ|} = \frac{|BP|}{|BO|}$, a stąd $|BP| \cdot |DQ| = |DO| \cdot |OB|$.

Zadanie 5. Liczby dziewięciocyfrowe

Uzasadnij, że w zbiorze liczb dziewięciocyfrowych o różnych cyfrach istnieje ponad sto liczb podzielnych przez 37.

Rozwiązanie
Z uwagi na to, że $999 = 37 \cdot 3 \cdot 9$ prawdziwe jest następująca kryterium podzielności przez 37.
Jeśli $N = \overline{abcdefghi}$ jest liczbą dziewięciocyfrową oraz liczba $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$ jest podzielna przez 37, to liczba N jest podzielna przez 37.
Liczba 148 jest podzielna przez 37. Zatem liczba postaci $\overline{148defghi}$, w której $d + g = 9$, $e + h = 9$ oraz $f + i = 9$ jest podzielna przez 37, gdyż $\overline{def} + \overline{ghi} = 999$.
Z pozostałych cyfr tworzymy 3 pary: $0 \leftrightarrow 9, 2 \leftrightarrow 7, 3 \leftrightarrow 6$.
Cyfrę d można wybrać na 6 sposobów, cyfrę e można wybrać na 4 sposobów, cyfrę f można wybrać na 2 sposoby, pozostałe cyfry: g, h, i są wyznaczone przez swoich partnerów. Tak skonstruowanych liczb postaci $\overline{148defghi}$ o różnych cyfrach i podzielnych przez 37 jest $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$. Uwzględniając, że blok 148 może stać jeszcze w innych dwóch miejscach uzyskujemy ponad 100 liczb spełniających warunki zadania.
Uwaga: Liczbę 148 można zastąpić innymi liczbami podzielnymi przez 37 np.: 185, 481, 814, 851 i może ona zamiast na początku stać na końcu, czy też w środku. Zatem liczb spełniających warunki zadania jest jeszcze więcej.