Szkice rozwiązań (kwiecień 2022)

Zadanie 1. Dwie liczby dodatnie

Dwie liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a^3 + ab - b^3 = (a+b)^2$. Wyznacz wartości jakie może przyjmować różnica $a - b$.

Rozwiązanie:

Równość $a^3 + ab - b^3 = (a+b)^2$ jest równoważna kolejnym równościom:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) + ab = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b-1)(a^2+ab+b^2) = 0.$$

Z uwagi na to, że $a^2+ab+b^2 > 0$, mamy $a-b-1=0$, a stąd $a-b=1$.

Zadanie 2. Para liczb całkowitych

Wyznacz parę liczb całkowitych dodatnich (x, y) spełniającą równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2022}$ i taką, by x przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

Rozwiązanie:

Wyznaczając x z podanego równania otrzymujemy $x = \frac{2022y}{y-1011} = 2022 + \frac{1011\cdot 2022}{y-1011}$. Warunek $x > 0$ będzie spełniony, gdy y będzie większy od 1011. Wyrażenie $\frac{1011\cdot 2022}{y-1011}$ jest więc dodatnie, a jego najmniejszą całkowitą wartością jest 1. Z zależności $\frac{1011\cdot 2022}{y-1011} = 1$, otrzymujemy: $y = 1011 \cdot 2023$. Zatem szukaną parą liczb jest para $(2023,\ 1011\cdot 2023)$.

Zadanie 3. Para liczb

Niech A będzie liczbą dwucyfrową, a B liczbą trzycyfrową. Liczba A powiększona o B% jest równa liczbie B pomniejszonej o A%. Wyznacz wszystkie pary liczb (A, B).

Rozwiązanie:

Warunek zadania zapiszmy w postaci $A + \frac{AB}{100} = B - \frac{AB}{100}$. Stąd otrzymujemy:

$AB = 50(B-A)$; $(50-A)(50+B) = 2500$ i $50 - A = \frac{2500}{50+B}$.

Z uwagi na to, że B jest liczbą trzycyfrową mamy $0 \le 50 - A = \frac{2500}{50+B} \le \frac{2500}{50+100} < 17$.

Liczba $50 - A$ jako dzielnik liczby 2500 mniejszy od 17 musi być równa: $1, 2, 4, 5, 10$.

Jedyne pary liczb (A, B) spełniające warunki zadania to:
$(46, 575), (45, 450), (40, 200)$.

Zadanie 4. Trzy liczby i dwie nierówności

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c takie, że $ab + bc + ca \ge a + b + c$. Udowodnij, że $a + b + c \ge 3$.

Rozwiązanie:

Z nierówności $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$ wynika, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca.$$

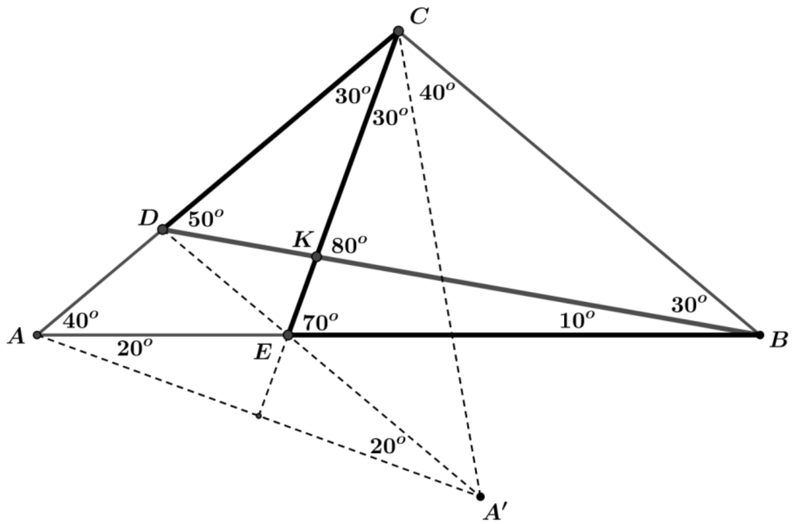
Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia otrzymujemy:
$(a+b+c)^2 \ge 3\cdot(ab+bc+ca)$. Zatem
$\frac{a+b+c}{3} \ge \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \ge 1$, a stąd $a+b+c \ge 3$.

Zadanie 5. Pola trójkątów w trójkącie

Trójkąt ABC jest równoramienny, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $|\measuredangle C| = 100^\circ$. Punkt D leży na boku AC oraz $|\measuredangle DBA| = 10^\circ$. Punkt E leży na boku AB oraz $|EB| = |CB|$. Punkt K jest punktem przecięcia odcinków BD i CE. Udowodnij, że pole trójkąta KCD jest równe polu trójkąta KBE.

Rozwiązanie:

Niech punkt A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej CE.



Trójkąt $AA'C$ jest równoboczny. Z sumy miar kątów trójkąta $AA'D$ otrzymujemy, że $|\measuredangle ADA'| = 100^\circ$. Zatem odcinki DE i CB są do siebie równoległe. Pola trójkątów BEC i BDC są równe, a ich częścią wspólną jest trójkąt BKC, zatem pola trójkątów KCD i KBE są równe.